Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia

*Kauê da Silva Sena*

Bacharelado em Ciências Físicas e Biomoleculares

# Um percurso rumo ao teorema de Atiyah-Singer

Orientador: Carlos Henrique Grossi Ferreira, ICMC-USP.
Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo
São Carlos, Estado de São Paulo, Brasil. 30 de junho de 2020

# Um percurso rumo ao teorema de Atiyah-Singer

**Resumo**

O projeto do qual resulta esse trabalho teve por objetivo o estudo dos pré-requisitos do teorema de Atiyah-Singer para que, depois, uma demonstração do teorema fosse estudada. Aqui apresentamos, de forma abreviada, uma significativa parcela dos conceitos e resultados matemáticos necessários à enunciação e demonstração do teorema, os quais foram abordados no decorrer do projeto de conclusão de curso e não esgotam o conteúdo teórico requerido pelo teorema. A porção coberta desse conteúdo abrange os seguintes assuntos que serão apresentados: variedades suaves; estrutura tangente de variedades suaves; funções suaves, submersões, imersões e mergulhos; fluxos e curvas integrais; grupos de Lie e suas álgebras de Lie; fibrados vetoriais suaves; seções de fibrados vetoriais e formas diferenciais; conexões afins em fibrados vetoriais; curvatura em fibrados vetoriais; fibrados principais; conexões e distribuições em fibrados principais; curvatura em fibrados principais; e fibrados associados.

## 1 Introdução

O teorema de Atiyah-Singer é um dos mais marcantes resultados em geometria obtidos no século XX. Grosso modo, o teorema lida com sistemas de equações diferenciais. O índice analítico associado a um sistema de equações diferenciais consiste na diferença entre o número de parâmetros necessários para descrever todas as soluções e o número de relações existentes entre as equações do sistema. À primeira vista, pode parecer tão difícil calcular o índice analítico quanto encontrar as soluções do sistema. O teorema de Atiyah-Singer mostra justamente que não é o caso, porque o índice analítico efetivamente é determinado só pela topologia dos espaços envolvidos. Destacamos ainda que vários outros teoremas notáveis da geometria são casos particulares do teorema de Atiyah-Singer (por exemplo, o teorema de Riemann-Roch, o teorema de Gauss-Bonnet e o teorema da assinatura de Hirzebruch).

Suponha que $M$ seja uma variedade compacta sem bordo orientada, que $E$ e $F$ sejam fibrados vetoriais suaves sobre $M$, e que $D$ seja um operador diferencial elíptico de $E$ para $F$. O índice analítico $\mathrm{ind_a}(D)$ do operador $D$ é a diferença $\dim\ker D - \dim \mathrm{coker} D$ entre as dimensões de seu núcleo e de seu conúcleo. O teorema de Atiyah-Singer diz que o índice analítico $\mathrm{ind_a}(D)$ é igual ao índice topológico $\mathrm{ind_t}(D) = \int_M \mathrm{ch}(D)\mathrm{Td}(M)$.

Em nosso projeto de conclusão, não chegamos até o estudo da demonstração em si, mas percorremos uma extensão do trajeto até o teorema e é apresentá-la o objetivo desse trabalho. Cabe ressaltar mais um aspecto que delimita esse trabalho. Do esforço requerido para desenvolver a teoria necessária para o teorema de Atiyah-Singer, uma parte significativa se emprega na construção consistente de uma série de conceitos sofisticados e na articulação desses vários conceitos construídos, alguns inclusive de que se fez uso na explicação acima. Decidiu-se dedicar esse trabalho sobretudo à apresentação desse aspecto, sem que nos detenhamos em exibir minuciosamente as demonstrações de que as construções estão bem definidas, de que certos objetos existem e de que certas propriedades valem. Há muito valor nesse segundo aspecto e ele foi abordado no decurso do projeto de conclusão, entretanto, pareceu mais propício à elaboração desse documento conforme o modelo da monografia a abordagem segundo o primeiro aspecto.

Começaremos com algumas definições fundamentais relacionadas a variedades suaves. Em seguida, apresentaremos a ideia de fibrados e alguns conceitos relacionados, sobretudo considerando fibrados vetoriais. Cobriremos então o necessário de grupos de Lie a fim de apresentar os fibrados principais e resultados iniciais do estudo desses fibrados. As notas de aula [1] de Liviu I. Nicolaescu guiaram a escolha dos tópicos a se abordar. Já no estudo específico de cada um dos tópicos, recorremos sobretudo aos livros [2] de Loring W. Tu, [3] de John M. Lee e [4] de Ivan Kolář,Peter W. Michor e Jan Slovák. .

## 2 Variedades suaves

### 2.1 Definições iniciais

Entre os conceitos fundamentais no caminho para o teorema do índice de Atiyah-Singer está o de uma variedade suave. Começaremos por esse conceito que é material para a construção de tantos outros mais sofisticados nesse caminho, como o de fibrados vetoriais suaves e de fibrados principais. É importante salientar que nesse trabalho o termo "suave" sempre aludirá a condições de existência e continuidade de todas as derivadas; no caso de uma função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entende-se por suave que todas as derivadas parciais existem e são contínuas.

Como na definição de tantos outros conceitos adiante, a definição de variedade suave tenta abstrair de objetos familiares do contexto de $\mathbb{R}^n$ características o mais intrínsecas possível a fim de trabalhar com conceitos que são mais gerais sem perda de poder descritivo e obter com eles resultados mais gerais ou semelhantes, comumente, de maneira menos esforçosa, mais *natural.*

Considere um espaço topológico $M$. Diz-se que $M$ é uma ***variedade suave de dimensão*** $k$ se

i. $M$ é Hausdorff e tem base enumerável;
ii. Todo ponto de $M$ tem uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.
iii. Existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$ de $M$ para cada aberto $U_i$ da qual está definido um homeomorfismo $\varphi_i$ desde $U_i$ a um aberto $\breve{U}_i$ em $\mathbb{R}^n$ (leia $\breve{U}$ como "$U$ breve").
iv. Para quaisquer $U_i$ e $U_j$ membros da cobertura, vale que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é uma função suave de inversa suave (um ***difeomorfismo***).

Chamamos aos pares $(U_i, \varphi_i)$ de ***cartas***, e nos referimos a duas cartas satisfazerem a propriedade (iv) dizendo que essas cartas são ***compatíveis***. Diremos que uma carta ***registra*** um ponto quando tal ponto pertence ao aberto dessa carta e nos referiremos às funções $\varphi_i$ (e suas inversas) como ***mapeamentos***. À coleção das cartas pressupostas para uma variedade suave damos o nome de ***atlas***. Suprimiremos o termos "suave" e não faremos menção à dimensão de uma variedade, sempre que o contexto não pedir ou não deixar dúvida.

Da definição de variedade, brota, com certa naturalidade, o entendimento do que são funções suaves entre variedades. Sendo $M$ e $N$ variedades suaves de dimensões $k$ e $\ell$ (suponha sempre o "respectivamente" em frases assim), podemos expressar uma função $f : M \to N$ conforme cartas em cada uma das variedades e alicerçar a nova definição na definição de suavidade para funções $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$. Tome um ponto $p$ em $M$, uma carta $(U, \varphi)$ que registre $p$ e uma carta $(W, \varphi)$ que registre $f(p)$. Considerando $\varphi^{-1}$ restrita a $\varphi\big(f^{-1}\big(f(U) \cap W\big)\big)$ para poder compor $f$ com os mapeamentos, temos que $\breve{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma função para a qual a noção de suavidade já está definida, veja:

$$\mathbb{R}^k \supset \varphi\Big(f^{-1}\big(f(U) \cap W\big)\Big) \xrightarrow{\varphi^{-1}} f^{-1}\big(f(U) \cap W\big) \xrightarrow{f} f(U) \cap W \xrightarrow{\psi} \breve{W} \subset \mathbb{R}^\ell.$$

Se para qualquer ponto $p$ em $M$ e quaisquer cartas $(U, \varphi)$ e $(W, \psi)$ ajustados como acima, valer que $\breve{f}$ é suave, então diz-se que a própria $f$ é ***suave***. Para além disso, diz-se que $f : M \to N$ é um ***difeomorfismo*** se $f$ for suave e tiver uma inversa também suave.

## 2.2 Vetores tangentes, tipos de mapas suaves e subvariedades

Para tipificar alguns mapas suaves especiais em breve, e para bastantes outras coisas mais adiante, precisamos trazer de $\mathbb{R}^k$ a ideia de vetores tangentes. Há algumas maneiras equivalentes de fazer isso, mas talvez a mais profícua – por conseguir reaplicar-se em contextos nos quais as demais não conseguem – seja aquela em que se abstrai dos vetores de $\mathbb{R}^k$ a qualidade de determinar derivadas direcionais para funções suaves de $\mathbb{R}^k$ para $\mathbb{R}$. Uma outra maneira leva em consideração classes de curvas às quais certo vetor é tangente. Parte da relação entre vetores tangentes e curvas transparecerá quando falarmos em curvas integrais e fluxos.

Fixe um ponto $p$ na variedade $M$. No espaço de todos os pares $(U, \alpha)$, em que $U$ é um aberto de $M$ que contém $p$ e $\alpha$ é uma função suave desde $U$ a $\mathbb{R}$, define-se esta relação de equivalência: $(U, \alpha) \sim (V, \beta)$ se $\alpha$ e $\beta$ coincidem num aberto incluso em $U \cap V$. Chamamos as classes de equivalência de ***germes de funções suaves*** em $p$ e denotamos por $[\alpha]_p$ a classe correspondente a uma função suave $\alpha$ desde um aberto em torno de $p$ para $\mathbb{R}$. O espaço de todos os germes em $p$ é simbolizado por $C^\infty_p(M)$. Uma ***derivação*** em $p$ é um mapa linear $D : C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte regra do produto: $D[\alpha\beta]_p = \alpha(p)v[\beta]_p + \beta(p)D[\alpha]_p$.

Considere $M = \mathbb{R}^k$ e fixe um ponto $p$. Dado um vetor $v$ em $\mathbb{R}^k$, dizemos que um par $(p, v)$ é um ***vetor tangente*** em $p$ (visualize isso como a flecha $v$ apoiada em $p$) e denotamos o par $(p, v)$ por $v_p$. Podemos entender $v_p$ como uma derivação em $p$ definindo a maneira como atua em germes: $v_p[\alpha]_p = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(p + tv)\right)_{t=0}$. Podemos também fazer o inverso, para cada derivação $D$ em $p$, encontrar o vetor $v \in \mathbb{R}^k$ tal que $v_p = D$. Dado um germe $[\alpha]_p$, tome um representante $(U, \alpha)$. Como $\alpha : U \to \mathbb{R}$ é suave, podemos escrever $\alpha(x) = \alpha(p) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\alpha\big(p + t(x - p)\big)\right] \mathrm{d}t$. Denotando por $x^i$ e $p^i$ as componentes de $x$ e $p$, ficamos com $\alpha(x) = \alpha(p) + \sum_{i=1}^k (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\big(a + t(x - a)\big)\mathrm{d}t =: \alpha(p) + \sum_{i=1}^k (x^i - p^i)\beta_i(x)$. Vamos agora aplicar $D$ a $[\alpha]_p$. Note, de antemão, que, como $D$ segue a regra de Leibniz, $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$, o que implica que $D(1) = 0$ e, por linearidade, que $D(a) = 0$ para qualquer constante $a$. Tendo isso em mente, vemos que $D[\alpha]_p = 0 + D[\beta_i]_p(p^i - p^i) + \beta_i(p)(D[x^i]_p - 0) = \sum_{i=1}^k \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x^i}(p)D[x^i]_p$, o que quer dizer que $D$ é a derivação $v_p$ correspondente ao vetor $v := \sum_{i=1}^k D[x_i]_p\, e_i$, em que $e_1, \ldots, e_k$ são os vetores da base canônica. Dessa maneira, em $\mathbb{R}^k$, há uma correspondência entre derivações e vetores tangentes, a qual nos encoraja a partir para variedades arbitrárias $M$ só com a ideia de derivações para cumprir o papel dos vetores.

Definimos $\mathrm{T}_pM$, o ***espaço tangente a** $M$ **em** $p$*, como o espaço vetorial de todas as derivações de germes de funções suaves em $p$, às quais chamaremos também de ***vetores tangentes***. Dada uma função suave $f : M \to N$, podemos considerar o ***mapa tangente de** $f$ **em** $p$* definido como a função linear $\mathrm{T}_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$ que manda uma derivação $v$ para a derivação $(\mathrm{T}_pf)v : C^{\infty}_{f(p)}(M) \to \mathbb{R},\ \alpha \mapsto v(\alpha \circ f)$.

Vamos agora montar o fibrado tangente de $M$. Denote por $\mathrm{T}M$ esta união disjunta: $\bigsqcup_{p\in M} \mathrm{T}_pM$, e por $\pi : \mathrm{T}M \twoheadrightarrow M$ a projeção associada. Conferiremos a $\mathrm{T}M$ uma topologia e um atlas suave, de uma maneira natural, usando de material as tais estruturas já presentes em $M$. Uma carta $(U, \varphi)$ do atlas de $M$ induz em $\mathrm{T}M$ a carta $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ em que se define: $\hat{U} := \pi^{-1}(U)$ e $\hat{\varphi} : \hat{U} \to \breve{U} \times \mathrm{T}_{\varphi(p)}\mathbb{R}^k \simeq \breve{U} \times \mathbb{R}^k, (p, v_p) \mapsto \big(\varphi(p), T_p\varphi v_p\big)$. Já a topologia de $\mathrm{T}M$ é conferida designando como abertos os subconjuntos $A$ de $\mathrm{T}M$ tais que $\hat{\varphi}(\hat{U} \cap A)$ é aberto em $\breve{U} \times \mathbb{R}^k$ para qualquer carta $(\hat{U}, \hat{\varphi})$. Dizemos que $\mathrm{T}M$ com toda essa estrutura é o ***fibrado tangente*** de $M$.

Com esse construto que reúne os espaços tangentes em cada ponto, se pode definir para funções suaves $f : M \to N$ a função suave $\mathrm{T}f : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$, chamada de o ***mapa tangente total***, que manda cada $v_p$ em cada $\mathrm{T}_pM$ para $(\mathrm{T}_pf)v_p$. Aludiremos a ele, com frequência, puramente como o mapa tangente. O mapa tangente total goza dessas duas propriedades: (i) denotando por $1_M$ a identidade $M \to M$ e por $1_{\mathrm{T}M}$ a identidade $\mathrm{T}M \to \mathrm{T}M$, temos que $\mathrm{T}(1_M) = 1_{\mathrm{T}M}$; (ii) sendo $g : N \to O$ uma função suave, $\mathrm{T}(g \circ f) = (\mathrm{T}g) \circ (\mathrm{T}f)$. As atribuições $M \mapsto \mathrm{T}M$ e $f \mapsto \mathrm{T}f$ e as propriedades mencionadas, configuram um objeto especial à luz da teoria de categorias. Vamos introduzir suas noções básicas: a de categorias e a de funtores.

Uma ***categoria*** $\mathcal{C}$ consiste de uma coleção de ***objetos*** $X, Y, Z, \ldots$ e uma coleção de ***morfismos*** $f, g, h, \ldots$ que segue estes ditames. Para todo morfismo $f$, existem dois objetos que são chamados de domínio de $f$ e codomínio de $f$; se eles são, respectivamente, $X$ e $Y$, denota-se $f : X \to Y$. Para cada objeto $X$, está designado o morfismo $1_X : X \to X$ que é chamado de ***morfismo identidade*** de $X$. Dados morfismos $f$ e $g$, se o codomínio de $f$ coincidir com o domínio de $g$, existe um morfismo $gf$ cujo domínio é o de $f$ e cujo codomínio é o de $g$, o qual chamamos de ***morfismo composto*** ou ***composição***. Devem ainda ser válidos estes dois axiomas:

- Para qualquer morfismo, $f : X \to Y$, vale que $1_Y f = f$ e $f 1_X = f$.
- Para quaisquer morfismos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$, os morfismos $h(gf)$ e $(hg)f$ são o mesmo morfismo.

Um ***funtor covariante*** $F$ desde uma categoria $\mathcal{C}$ para uma categoria $\mathcal{D}$ consiste nas atribuições: um objeto $FX$ em $\mathcal{D}$ para cada objeto $X$ em $\mathcal{C}$; um morfismo $Ff : FX \to FY$ em $\mathcal{D}$ para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, sendo $FX$ e $FY$ as imagens de $X$ e $Y$ por $F$. Essas atribuições estão sujeitas aos seguintes axiomas de funtorialidade: $(Fg)(Ff) = F(gf)$ e $F(1_X) = 1_{FX}$. Os funtores ***contravariantes*** são aqueles que invertem as direções dos morfismos quando aplicados. Em vista de que as variedades suaves junto com os mapas suaves formam uma categoria, constata-se que $\mathrm{T}$ é um funtor desta categoria para ela mesma. Outras categorias com que nos depararemos são: a de espaços vetoriais de dimensão finita e mapas lineares, e a de fibrados vetoriais com morfismos de fibrados vetoriais. Nesse trabalho, o uso que faremos da linguagem da teoria de Categorias não é amplo. Contudo, ela orienta o atual pensamento sobre a geometria e sobre várias áreas da matemática e é o que nos torna, de uma perspectiva filosófica, propensos a empregar bastantes vezes o termo *natural*.

Cabe agora definir os tipos especiais de mapas suaves a que se fez menção. Uma função suave $f : M \to N$ é dita uma ***submersão*** quando seu mapa tangente é sobrejetivo em cada ponto de $M$, isto é, $\mathrm{T}_p f$ é sobrejetivo para todo $p \in M$. Já quando o mapa tangente de $f$ é injetivo em cada ponto, diz-se que $f$ é uma ***imersão***. Se além de ser uma imersão, $f$ é um homeomorfismo sobre a imagem, diz-se que $f$ é um ***mergulho***. Munidos dessa maneira de qualificar os mapas suaves, podemos definir o que é uma subvariedade. Há algumas noções um pouco diversas de o que é uma subvariedade; e essa diversidade surge da distinção no que se espera para os mapas de inclusão e para as estruturas topológicas dos subconjuntos que se quer encarar como subvariedades. Aquelas de que nos ocuparemos são as ***subvariedades mergulhadas*** que consistem em variedades $N$ que estão inclusas em $M$ como conjuntos e para as quais o mapa de inclusão $N \hookrightarrow M$ se trata de um mergulho suave.

### 2.3 Campos vetoriais, curvas integrais e fluxos

Um ***campo vetorial*** $X$ em $M$ é uma função $X : M \to \mathrm{T}M$ que associa a cada ponto $p$ em $M$ um elemento de $\mathrm{T}_p M$ que denotamos por $X_p$. Simbolizamos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial de todos os campos vetoriais suaves, no qual a adição e a multiplicação por escalares são definidas fibra a fibra: $X + Y : p \mapsto X_p + Y_p$ e $aX : p \mapsto aX_p$. Como cada $X_p$ é uma derivação de germes de funções em $p$, é propício entender $X$ como um operador em $C^\infty(M)$ que atua mandando a função suave $\alpha$ para a função suave $X\alpha : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto X_p[\alpha]_p$. Também desde o nível da atuação em germes, dados campos suaves $X$ e $Y$, define-se o campo $[X, Y] : p \mapsto X_p Y_p f - Y_p X_p f$ que também é suave; e com isso, se ganha a operação binária $[\cdot, \cdot]$ em $\mathfrak{X}(M)$ chamada de ***colchete de Lie***. Da definição do colchete de dois campos se extrai que ele é uma operação bilinear, antisimétrica e que satisfaz a chamada identidade de Jacobi: $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [[X, Z], Y]$. Assim, provido do colchete de Lie, o espaço vetorial $\mathfrak{X}(M)$ constitui uma ***álgebra de Lie***, estrutura algébrica que é justamente um espaço vetorial em que está definido um produto de vetores que é bilinear, antisimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

Vamos explorar a relação entre vetores e curvas. Dada uma curva $\gamma : J \to M$ desde um intervalo aberto $J$, podemos definir de forma natural $\gamma'(t)$, ***o vetor tangente à curva*** $\gamma$ ***no ponto*** $\gamma(t)$. O vetor $\gamma'(t)$ é a derivação no ponto $\gamma(t)$ que atribui a cada germe $[\alpha]_p$ o valor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\alpha \circ \gamma(s)\big)_{s=t}$. Denotamos por $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ ou por $\gamma'(t)$ a função que associa $\gamma'(t)$ a $t$ em $J$. Emerge dessa noção de um vetor ser tangente a uma curva a indagação sobre se, dado um campo vetorial, podemos encontrar curvas a que esse campo tangencia. Diz-se que $\gamma : J \to M$ é uma ***curva integral de*** $X$ ***com início em*** $p$ se $\gamma(0) = p$ e para todo $t$ em $J$ valer que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$. A indagação então encontra uma versão precisa na questão da existência de curvas integrais de $X$ iniciadas em cada $p$. A resposta para isso é marcante, mais que existirem tais curvas, é possível encontrar uma função que colige a relação de $X$ com suas curvas integrais de maneira otimal: o fluxo maximal de $X$.

Denotaremos, em todo o texto, por $\boldsymbol{\pi}_i$ a projeção de um produto cartesiano sobre sua $i$-ésima componente. Uma função $\Phi$ desde um aberto $D$ de $\mathbb{R} \times M$ para $M$ é chamada um ***fluxo*** em $M$ desde que satisfaça as seguintes condições:

(i) $D$ é um ***domínio de fluxo***, isto é, inclui a tira $\{0\} \times M$ e se quebra em intervalos abertos da forma $D_m = \boldsymbol{\pi}_1\big(\boldsymbol{\pi}_2^{-1}(m)\big)$ para cada $m$ em $M$;

(ii) $\Phi(0, m) = m$ para todo $m$; e

(iii) para todo $m \in M$, se $s \in D_m$, se $t \in D_{\Phi(s,m)}$ e se $s + t \in D_m$, então $\Phi\big(t, \Phi(s, m)\big) = \Phi(s + t, m)$.

Diz-se que $X$ ***gera*** o fluxo $\Phi$ ou que $\Phi$ é um ***fluxo de*** $X$ se para todo ponto $m$ a função $\Phi^m : D_m \to M, \quad t \mapsto \Phi(t, m)$ é uma curva integral de $X$. Diz-se que o fluxo $\Phi$ do campo $X$ é ***maximal*** se não há um outro fluxo gerado por $X$ que coincida com $\Phi$ em $D$ e cujo domínio inclua $D$ de modo próprio. A existência de um ***fluxo maximal*** para cada campo vetorial suave de uma variedade provém de que se pode expressar localmente essa questão em cartas, cenário em que o teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de soluções para as equações diferenciais que caracterizam as curvas integrais e no qual, com um certo empenho analítico, podemos estender os domínios das curvas até a maximalidade.

## 3 Fibrados vetoriais suaves

### 3.1 Fibrados

Há diversos conceitos agrupados sob o nome de fibrados, o qual abarca desde coisas tão simples como uma mera sobrejeção a coisas bem refinadas como os fibrados vetoriais suaves, a que chegaremos em breve.

Sejam $M$, $E$ e $Y$ variedades suaves. O espaço $X$ é dito um $Y$-***fibrado suave sobre*** $M$ se estão estabelecidos os seguintes aspectos:

(i) há uma função suave sobrejetiva $\pi : X \to M$; e

(ii) há uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $M$ a cada aberto $U_\alpha$ da qual está associado um difeomorfismo $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Y$ tal que $\boldsymbol{\pi}_1 \circ \psi_\alpha = \pi$, em que $\boldsymbol{\pi}_1$ é a projeção $U_\alpha \times Y \to U_\alpha$.

O termo fibrado, em verdade, se emprega para aludir a essa "estruturação" inteira com seus vários elementos, mas também metonimicamente aos elementos com que ela é montada. Esse é um desses objetos, comuns em matemática, diante dos quais é difícil poder apontar o que é o objeto em si; ele é essa "estrutura". Veremos que, apesar de um pouco impreciso à primeira vista, isso enseja um linguajar fluido e é contraproducente engessar o termo para que se refira unicamente a $E$, ou a $\pi$ ou à lista $(\pi, E, M, Y)$. Dispomos, porém, do termo ***espaço total*** para nos referirmos especificamente à variedade $E$; de ***espaço basal*** para $M$; de ***mapa de projeção*** para $\pi$; e de ***fibra padrão*** ou ***fibra modelo*** para $Y$. Os mapas $\psi_\alpha$ são chamados de ***trivializações locais***, entenderemos que esse é um bom termo na reflexão que se segue.

A definição apresentada é uma das noções mais básicas de fibrados, mas ela pode ser feita ainda mais básica exigindo menos: por exemplo, que as variedades sejam só topológicas, que $\pi$ seja só uma sobrejeção contínua e que os mapeamentos $\psi_\alpha$ sejam apenas homeomorfismos. Aí diríamos que $\pi : X \to M$ é um ***Y-fibrado topológico*** ou só um ***fibrado***. O espírito comum dessas duas noções de fibrado reside em como contrastam com a ideia de um mero produto de espaços. O produto $Y \times M$, com a topologia produto, junto da projeção natural $\boldsymbol{\pi}_2$ sobre a segunda componente obedecem à definição de fibrado acima e não o fazem com esforço, mas sim trivialmente. Uma trivialização para um aberto $A$ de $Y \times M$ é só uma encarnação da injeção $A \hookrightarrow Y \times M$. A coisa é que $\pi : X \to M$ pode satisfazer a definição de fibrado sem que $X$ seja homeomorfo a $Y \times M$. Felizmente, existe um exemplo de dimensão baixa o suficiente com objetos topológicos bem conhecidos para que possamos visualizar isso. A faixa de Möebius (de "largura infinita") é um fibrado sobre o círculo com fibra modelo $\mathbb{R}$, mas não é homeomorfo ao cilindro (de "altura infinita"). Ambos, contudo, ao restringirmos o olhar para bem perto, se assemelham a um produto do espaço base com a fibra modelo.

Já para constituir um fibrado vetorial, é preciso apetrechar um pouco mais essa estrutura. Se considerarmos que a fibra padrão é um espaço $\mathbb{K}$-vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão finita (entenda $\mathbb{K}$ como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e que a fibra $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ de cada ponto $p$ de $M$ é um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{V}$, temos um ***fibrado K-vetorial de fibra padrão*** $\mathbb{V}$ se cada $\psi_\alpha$ é um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear nas fibras, isto é, enquanto mapa $E_p \to \{p\} \times \mathbb{V}$ é um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear. A lembrança do objeto global que construímos na discussão dos espaços tangentes a uma variedade não é à toa, o exemplo primordial de um fibrado vetorial é o fibrado tangente de uma variedade. Na próxima subseção, nos capacitaremos de obter muitos exemplos também naturais a partir de um fibrado vetorial arbitrário.

Considere agora dois fibrados $\mathbb{K}$-vetoriais $(E, M, \pi, \mathbb{V})$ e $(F, M, \rho, \mathbb{W})$ sobre a mesma variedade $M$. Um mapa suave $\Xi : E \to F$ é dito um ***morfismo de fibrados*** $\mathbb{K}$-***vetoriais*** se ele preserva as fibras ($\rho \circ \Xi = \pi$) e é linear nelas. Se quiséssemos falar em morfismos entre fibrados sobre variedades disintas $M$ e $N$ teríamos de tratar de mais um mapa $\xi : M \to N$ e exigir $\xi \circ \pi = \rho \circ \Xi$ antes da linearidade em fibras. Encontraremos, sobretudo, morfismos do primeiro tipo. Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$, sempre podemos considerar um fibrado sobre $M \times \mathbb{V}$ sobre $M$ cuja projeção é simplesmente $\boldsymbol{\pi}_1$. Denotamos esse fibrado por $\underline{\mathbb{V}}_M$ e, frequentemente, omitimos o subescrito. Dizemos de um fibrado vetorial $E$ de fibra modelo $\mathbb{V}$ que ele é ***trivial*** se há um isomorfismo de fibrados vetoriais desse fibrado com $\underline{\mathbb{V}}$.

As trivializações locais de um fibrado vetorial dão origem a outros mapas que codificam os dados desse fibrado, e é até uma abordagem comum definir um fibrado vetorial a partir desses mapas. Como trivializações $\psi_\alpha$ e $\psi_\beta$ dão isomorfismos lineares no nível das fibras, podemos definir o mapa $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ definindo $\psi_{\alpha\beta}(x)$, para cada $x$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, conforme o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \{x\}\times\mathbb{V} \arrow[rr, bend left, "1_{\{x\}}\times\psi_{\alpha\beta}(x)"] & E_x \arrow[l, "\Phi_\beta"'] \arrow[r, "\Phi_\alpha"] & \{x\}\times\mathbb{V} \end{tikzcd}.$$

Nos referimos a esses mapas $\psi_{\alpha\beta}$ como os ***mapas de colagem*** do fibrado vetorial $E$.

### 3.2 Fibrados vetoriais derivados de um fibrado vetorial

O estudo dos fibrados vetoriais e outros estudos que dependam do conceito de fibrado vetorial são especialmente profícuos se a descrição dos objetos que vão aparecendo é feita usando fibrados vetoriais relacionados e seções de tais fibrados, objetos que apresentaremos em breve. Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ há numerosos espaços vetoriais derivados dele: $\mathbb{V}^*, \mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*, \Lambda\mathbb{V}$, etc; dado um fibrado vetorial $E$, há contrapartidas para cada um desses tipos de espaços vetoriais derivados: $E^*$, $E\times E^*$, $\Lambda E$, etc.

A obtenção desses outros espaços vetoriais é codificada por meio de ***funtores suaves*** da categoria $\mathcal{C}$ de espaços vetoriais de dimensão finita para ela mesma, que são funtores $\Theta$ tais que, para quaisquer dois objetos $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, a função que $\Theta$ induz desde $\mathrm{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ para $\mathrm{Hom}(\Theta\mathbb{V},\Theta\mathbb{W})$ pondo $L\mapsto\Theta L$ é uma função suave (requerimento que faz sentido já que os espaços Hom tem estrutura suave natural por serem espaços vetoriais de dimensão finita). Para algumas construções precisamos considerar funtores suaves contravariantes ou funtores que partam de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$. Ainda assim, tudo se dá de forma análoga.

Vamos exibir o processo para un funtor suave $\Theta$ covariante e um fibrado vetorial $(E, M, \pi, \mathbb{V})$ com um atlas de fibrado $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$. Como cada fibra $E_x$ é um espaço vetorial, pode-se tomar a imagem dela por $\Theta$ e definir o espaço total do novo fibrado como $\Theta E := \bigsqcup_{x\in M}\Theta E_x$. Denote por $\rho$ a projeção sobre $M$. Vamos agora atribuir a $\Theta E$ um atlas de fibrado. A restrição de um mapa $\psi_\alpha$ a uma fibra $E_x$ dá um isomorfismo linear $\psi_{\alpha,x} : E_x \to \{x\}\times\mathbb{V}$. Como um funtor preserva ismorfismos, $\Theta\psi_{\alpha,x} : \Theta E_x \to \Theta(\{x\}\times\mathbb{V}) \simeq \{x\}\times\Theta\mathbb{V}$ é um isomorfismo linear. Podemos então montar o atlas de $\Theta E$ com cartas $(U_\alpha,\tilde\psi_\alpha)$, definindo $\tilde\psi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\Theta\mathbb{V},\quad v\mapsto\Theta\psi_{\alpha,\rho(v)}(v)$. A topologia em $\Theta E$, que advém da de $E$ mediante os mapeamentos $\psi_\alpha^{-1}$, é aquela gerada pela coleção dos conjuntos $\tilde\psi_\alpha^{-1}(W)$ para todo $\alpha$ e para todo aberto $W$ de $U_\alpha\times\Theta\mathbb{V}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{V}) \arrow[r, "\Theta"] & \mathrm{Hom}(\Theta\mathbb{V},\Theta\mathbb{V}) \\ \mathrm{GL}(\mathbb{V}) \arrow[u, hook] & \\ U_{\alpha\beta} \arrow[u, "\varphi_{\alpha\beta}"] \arrow[uur, "\tilde\varphi_{\alpha\beta} := \boldsymbol{\pi}_2\circ\tilde\varphi_\alpha\circ\tilde\varphi_\beta^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

O pedido de que $\Theta$ seja um funtor suave serve à confirmação de que as cartas são de fato suavemente compatíveis, o que se vê pelo diagrama ao lado. Os mapas de colagem $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ são suaves já que são compostas de funções suaves.

É, de forma geral, simples a verificação de que os funtores associados à construção em nível de espaço vetorial dos fibrados derivados que encontraremos são mesmo suaves. Por exemplo, o funtor que leva $\mathbb{V}$ no seu dual $\mathbb{V}^*$ e $L:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ na sua adjunta $L^*$ é linear e contínuo enquanto função $\mathrm{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{W})\to\mathrm{Hom}(\mathbb{V}^*,\mathbb{W}^*)$, logo, é suave.

### 3.3 Seções e formas diferenciais

Diz-se que um mapa suave $s : M \to X$ é uma ***seção suave*** do $Y$-fibrado suave $\pi : X \to M$ se $s$ designa para cada ponto da variedade um elemento da fibra, precisamente, $\pi \circ s = 1_M$. Especial interesse desperta o conceito de seção aplicado a fibrados vetoriais logo que se vislumbram os vários objetos úteis que podem ser definidos de modo simples como seções do fibrado ou de algum dos fibrados que dele derivam. Denotamos o espaço de todas as seções suaves do fibrado $X$ como $\Gamma(X)$.

Uma seção $s$ de um fibrado vetorial $E$ atribui a cada ponto $p$ de $M$ um vetor $e$ da fibra $E_p$. Se $E$ é o fibrado tangente de $M$, isso é precisamente no que consiste um campo vetorial. Um outro tipo importante de seção de um fibrado associado naturalmente a $M$ são as formas diferenciais, com as quais nos familiarizaremos agora. Elas, assim como os campos vetoriais, são uma classe de objetos que podem realizar-se como seções e estão intrínsecamente associados à variedade. Ocorre, entretanto, que a estrutura algébrica dessa classe de objetos é bem mais requintada.

Algo que, tanto oferece uma das justificativas ao estudo das formas diferencias, quanto surpreende no decurso desse estudo é o préstimo das formas diferenciais para generalizarem a ideia de funções integráveis escalares em $\mathbb{R}^n$ para o contexto de variedades. Não vamos explorar isso porém. O serviço principal que as formas diferenciais terão a chance de nos prestar ocorrerá quando estivermos definindo conexões e curvaturas nos fibrados principais.

Em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ podemos considerar funcionais lineares $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, que são elementos de $\mathbb{V}^*$. Bom, aqui podemos considerar seções do fibrado cotangente $\mathrm{T}^*M$. Uma seção $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*M)$ pode ser vista como um mapa $\mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ que que manda vetores $v_p$ de cada espaço tangente $\mathrm{T}_pM$ para $\omega_p v_p$, isto é, $\omega$ atua como funcional linear no nível de cada espaço tangente. Dizemos que uma seção $\omega$ de $\mathrm{T}^*M$ é uma ***1-forma*** em $M$. Podemos, porém, considerar formas que recebem mais de um argumento tomando seções dos fibrados exteriores e dos fibrados simétricos. Uma seção $\omega \in \Gamma(\Lambda^k\mathrm{T}^*M)$ é dita uma ***$k$-forma exterior*** em $M$; uma seção $\omega \in \Gamma(\mathrm{S}^k\mathrm{T}^*M)$ é dita uma ***$k$-forma simétrica***.

Acontece, contudo, que no empreendimento de estabelecer uma teoria de cálculo nas variedades são as formas antisimétricas, as formas exteriores, que se revelam fundamentais. Essa é uma das razões pelas quais, o nome ***$k$-formas diferenciais***, ou ainda só ***$k$-formas***, passou a ser muito usado para aludir às formas exteriores. Sempre que falarmos numa forma diferencial ou simplesmente numa forma, estaremos pensando nessas que são antisimétricas. Denotaremos por $\Omega^k(M)$ o espaço de todas as $k$-formas em $M$; consideramos também o caso $k = 0$, pro qual $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$. Por $\Omega^\cdot(M)$ denotamos o espaço fruto da soma direta $\bigoplus_{k=0}^\infty \Omega^k(M)$, que, em verdade, só acontece até que $k$ atinja a dimensão de $M$, já que a potência exterior de um espaço vetorial é nula quando de grau maior do que a dimensão do espaço.

Um outro tipo importante de seções são as que têm valores em espaços vetoriais e se obtêm tomando seções de fibrados vetorias que são produto tensorial de fibrados sobre uma mesma variedade. Para ver isso precisamente, considere sobre $M$ um fibrado vetorial $E$. Dizemos que uma seção $\omega$ do fibrado $\Lambda^k\mathrm{T}^*M \otimes E$ é uma ***$k$-forma em $M$ a valores em $E$***, ou uma ***$E$-$k$-forma*** em $M$. Perceba que poderiamos também considerar seções dos tipos acima não só em $M$ mas também no próprio espaço total $E$ de um fibrado suave sobre $M$. Por exemplo, seções de $\mathrm{T}E$ ou de $\Lambda^k\mathrm{T}^*E \otimes \mathbb{W}$, sendo $\mathbb{W}$ um espaço vetorial. Voltemos, porém, às $k$-formas em $M$ para contemplarmos mais coisas.

O produto exterior $\wedge$ no nível da álgebra exterior $\Lambda\mathbb{V} = \bigotimes_{k=0}^{\infty} \Lambda^k\mathbb{V}$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ induz o produto exterior de formas em uma variedade. Dadas formas $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^\ell(M)$, a forma $\omega\wedge\eta$ é uma $(k+\ell)$-forma definida como $\omega\wedge\eta : p \mapsto \omega_p\wedge\eta_p$. Com esse produto, o conjunto $\Omega^{\cdot}(M)$ de todas as formas exteriores em $M$ é um álgebra graduada. Assim como para formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$, há um operador d em $\Omega^{\cdot}(M)$ chamado também de ***derivada exterior*** que produz de uma $k$-forma $\omega$ uma $(k+1)$-forma $\mathrm{d}\omega$. Uma maneira de entender d é como uma gama de operadores $\mathrm{d}^k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. No caso $k = 0$, $d$ coincide com T, isto é, dada uma função $\alpha \in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}\alpha$ é o mapa tangente $\mathrm{T}\alpha : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$. Esse caso $k = 0$ é inclusive um dos motivos para ser comum usar d para o mapa tangente, em contraste com nossa escolha que foi a de marcar o caráter funtorial de T. Numa perspectiva axiomática, o espaço $\Omega^{\cdot}(M)$ das $k$-formas pode ser definido como o espaço gerado a partir de $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ por estas três operações:

- a operação binária + de adição que faz de $\Omega^{\cdot}(M)$ um grupo abeliano,
- a operação binária $\wedge$ que é associativa, e
- a operação unária d,

as quais estão sujeitas às seguintes condições, nas quais $f$ é uma função suave qualquer e $\eta$ é uma forma qualquer obtida por meio das operações:

(i) d e $\wedge$ distribuem-se sobre a adição;
(ii) $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$ ;
(iii) $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f = 0$ ;
(iv) $\mathrm{d}(f \wedge \eta) = \mathrm{d}f \wedge \eta + f \wedge \mathrm{d}\eta$ ; e
(v) $\mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \eta) + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\eta = 0$.

Dos axiomas, extrai-se essa série de propriedades: se $\eta$ é uma $k$-forma e $\omega$ é uma $\ell$-forma, $\mathrm{d}\eta$ é uma $(k+1)$-forma, $\omega \wedge \eta$ é uma $(k+\ell)$-forma; $\mathrm{d}\mathrm{d}\eta = 0$ para toda forma $\eta$; se $\eta$ é uma $k$-forma para um $k$ ímpar, $\eta \wedge \eta = 0$; $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell}\eta \wedge \omega$; e $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^\ell\omega \wedge \mathrm{d}\eta$ se $\omega$ é uma $\ell$-forma.

### 3.4 Conexões e curvatura relativa a uma conexão

A ideia por trás da primeira definição de conexão que apresentaremos é a de, em $\mathbb{R}^n$, derivar um campo na direção de outro. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, a derivada direcional de uma função escalar $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é definida sem problemas, ponto a ponto, como o limite $(D_v f)(p) := \lim_{t\to 0} \big(f(p+tv) - f(p)\big)/t$. Podemos estender essa definição para um campo vetorial suave $Y$ em $\mathbb{R}^n$, visto como função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, estabelecendo $(D_v Y)_p := \lim_{t\to 0}(Y_{p+tv} - Y_p)/t$ para cada $p$. Podemos dar ainda mais um passo e definir, dado um outro campo $X$, o campo $D_X Y$ fazendo com que em cada $p \in \mathbb{R}^n$ ele assuma o valor de $D_{X_p} Y$ em $p$. A derivada direcional $D_X Y$ enquanto mapa $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ dispõe das seguintes propriedades: é $C^\infty(M)$-linear em $X$; é $\mathbb{R}$-linear em $Y$ e obedece a regra de Leibniz $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_X Y$.

Em uma variedade $M$, não conseguimos definir uma derivada de $Y$ na direção do vetor $X_p$

porque não conseguimos comparar o valor de $Y$ num ponto $p$ com o valor de $Y$ num ponto $q$ perto de $p$. Não há maneira canônica de identificar os espaços tangentes $\mathrm{T}_pM$ e $\mathrm{T}_qM$ e obter uma definição para $Y_q - Y_p$. Sai-se desse impasse fazendo a definiçao de conexão a partir das propriedades da derivada direcional. Uma ***conexão afim*** $\nabla$ ***em*** $M$ é um mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que (i) é $C^\infty(M)$-linear no primeiro argumento, (ii) é $\mathbb{R}$-linear no segundo argumento e (iii) satisfaz a regra de Leibniz $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

Repare que podemos enxergar $\nabla$ como um mapa $\mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{T}M)$ fixando o primeiro argumento, a imagem de um campo $X$ é a forma $\nabla_X$ a valores em $\mathrm{T}M$, a qual, por sua vez, podemos enxergar como um mapa $\mathrm{T}M \to \mathrm{T}M$. No que definiremos a seguir, entenda $\nabla_X\nabla_Y$ como a composta de $\nabla_X$ com $\nabla_Y$. Define-se a ***curvatura*** $R$ relativa a $\nabla$ como $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$. Mostra-se que a curvatura $R(X,Y)Z$ é $C^\infty(M)$-linear em $X$, em $Y$ e em $Z$.

Podemos levar a noção de conexão para um fibrado vetorial suave $E$ sobre $M$. Uma ***conexão*** $\nabla$ ***no fibrado vetorial*** $E$ é um mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E^* \otimes E)$ que (i) é $\mathcal{F}$-linear e (ii) satisfaz a regra de Leibniz: $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$ para $s \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$. Como antes, podemos definir a ***curvatura*** $R$ relativa a $\nabla$ como $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$, fórmula em que enxergamos $\nabla_X$ e $\nabla_Y$ como mapas $E \to E$.

## 4 Operadores $\mathcal{F}$-lineares e morfismos de fibrados vetoriais

Suponha que $E$ e $F$ sejam dois fibrados vetoriais sobre $M$ e denote $C^\infty(M)$ por $\mathcal{F}$. Dizemos que um mapa linear $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é um ***operador local de*** $E$ ***para*** $F$ se ocorre que, sempre que uma seção $s \in \Gamma(E)$ se anula em todo um aberto $U$ de $M$, a seção $Ls \in \Gamma(F)$ também se anula em todo esse aberto. Já se isso ocorre ponto a ponto, isto é, é válido que sempre que a seção $s$ se anula num ponto $p$ em $M$, a seção $Ls$ se anula em $p$, dizemos que $L$ é um operador pontual.

Mostra-se a seguinte propriedade que dá mais razão ao nome operadores locais: todo operador local $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ induz, dado um aberto $U$ de $M$, um mapa $L_U : \Gamma(E|U) \to \Gamma(E|U)$, chamado de ***restrição de*** $L$ ***a*** $U$, que é o único pro qual vale que $L_U(s|U) = (Ls)|U$ para toda seção $s$ de $E$. Mostra-se que os mapas $\mathcal{F}$-lineares $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ são locais e que suas restrições a abertos $U$ são também $\mathcal{F}$-lineares. Com isso e usando referenciais locais, mostra-se que, mais que locais, tais mapas $\mathcal{F}$-lineares são pontuais.

Há uma correspondência entre os morfismos de fibrados $\varphi : E \to F$ e os mapas $\mathcal{F}$-lineares $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$. Para vislumbrarmos isso, considere a função que leva o morfismo de fibrados $\varphi : E \to F$ no mapa $\varphi' : \Gamma(E) \to \Gamma(F), s \mapsto \varphi \circ s$. Para verificar a sobrejetividade, nota-se que, dado um mapa $\mathcal{F}$-linear $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$, para cada $x$ em $M$, podemos construir uma transformação linear $\varphi_x : E_x \to F_x$ definindo, para cada $e$ em $E_x$, que $\varphi_x(e) := (Ls)_x$ para qualquer seção $s$ de $E$ tal que $s_x = e$. Isso não depende da escolha de $s$, pois se $t$ é uma outra seção que vale $e$ em $x$ temos que $(s-t)_p = 0$ e, como $L$ é pontual, $L(s-t)_x = (Ls)_x - (Lt)_x = 0$, logo, $(Ls)_x = (Lt)_x$. Constrói-se então o morfismo de fibrados $\varphi$ que manda $e \in E_x$ para $\varphi_x(e)$ e pro qual temos $\varphi' = L$. Para verificar a injetividade, tomemos morfismos $\varphi$ e $\psi$ de $E$ em $F$ tais que $\varphi' = \psi'$. Para cada $x$ em $M$ e cada $e$ em $E_x$, pegue uma seção $s$ que valha $e$ em $x$. Temos $\varphi(e) = \varphi \circ s(x) = (\varphi' s)_x = (\psi' s)_x = \psi \circ s(x) = \psi(e)$. Logo, $\psi = \varphi$, do que segue a injetividade.

# 5 Grupos de Lie

## 5.1 Definições básicas

Eis mais uma ocasião em que incrementaremos uma objeto com que já somos familiares ganhando uma estrutura mais rica. Podemos enxergar um grupo de Lie como uma variedade a que se conferiu a qualidade algébrica de um grupo, mas também como um grupo em cujo comportamento se percebeu suavidade. Bom, um grupo $G$ se trata de um ***grupo de Lie*** se podemos nele considerar uma estrutura de variedade segundo a qual a operação de multiplicação $\mu : G \times G \to G$ e o mapa de inversão $\iota : G \to G$ são funções suaves. Na mesma toada, os morfismos de grupos suaves são os a que nos referimos como ***morfismos de grupos de Lie***. Há alguns exemplos fundamentais de morfismos de grupos de Lie que são também difeomorfismos:

- As ***translações à esquerda***, $L^g : x \mapsto gx$, são difeomorfismos. A suavidade decorre de que se pode escrever $L^g$ como combinação de funções suaves: $a \mapsto (g, a) \mapsto ga$. Como $g^{-1}ga = a$, a translação $L^{g^{-1}}$ é uma inversa suave para $L^g$, logo, $L^g$ é um difeomorfismo. E, é claro, o universo só é um lugar seguro porque as ***translações à direita*** $R^g : x \mapsto xg$ também são.
- O mapa de inversão $\iota$ também é, já que $\iota$ é suave e é inversa de si mesma.
- E, por fim, as ***conjugações*** $C^g$ também são, tendo em vista que $C^g$ se pode escrever como composta de difeomorfismos: $C^g = L^g \circ R^{g^{-1}}$.

Esses difeomorfismos tanto são importantes para entender a topologia dos grupos de Lie (enquanto homeomorfismos), quanto o são por ensejar uma série de construções naturais que faremos à frente.

Dada uma função suave $f : M \to N$, dizemos que campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são ***$f$-relacionados*** se para cada $m \in M$ valer que $(\mathrm{T}_m f)X_m = Y_{f(m)}$. Por $G$ ser uma variedade, podemos considerar campos vetoriais em $G$. Entre os campos vetoriais de $G$, há uma classe especial: a dos campos que são $L^g$-relacionados a si mesmos, os quais chamamos de ***campos invariantes à esquerda***. É imediato ver que a soma de dois campos invariantes à esquerda está $L^g$-relacionada a si mesma já que o mapa tangente é linear nas fibras de $TM$ e que o campo vetorial nulo é relacionado a si próprio. Isso faz da coleção de todos esses campos, que denotamos por $\mathfrak{g}$, um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$ e, mais ainda, $\mathfrak{g}$ é fechado sob o colchete de Lie. Em vista disso, nos referimos ao espaço $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à esquerda de $\mathcal{G}$ como ***a álgebra de Lie do grupo de Lie*** $G$.

Há uma outra propriedade muito importante da coleção de todos os campos invariantes à esquerda, ela é inteiramente catalogada pelo espaço tangente de $G$ na identidade $e$, ou seja, o valor que um campo invariante à esquerda assume na identidade dá de saber o valor assumido em todos os demais pontos de $G$. Essa correspondência se substancia no mapa de avaliação $\varepsilon$ que é simplesmente o mapa desde $\mathfrak{g}$ a $\mathrm{T}_eG$ que manda $X$ no seu valor $X_e$ na identidade e se trata de uma bijeção. Vamos fazer essa demonstração.

Já que $\varepsilon$ é linear, a injetividade vem simplesmente de que seu núcleo é trivial: se $X_e = 0$, temos que $X$ é nulo em todo $g$, pois $\mathrm{T}_e L^g$ é linear e, de que $X$, é invariante à esquerda temos que $\mathrm{T}_e L^g X_e = X_{L^g e} = X_g$. Provar que $\varepsilon$ é sobrejetivo requer-nos um pouco mais de escrita. Tome uma derivação $v$ no codomínio $T_e G$ de $\varepsilon$. O campo vetorial $\bar{v}$ definido como $g \mapsto T_e L^g v$ assume o valor $v$ em $e$ e é invariante à esquerda: $T_g L^h \bar{v}_g = T_g L^h T_e L^g \bar{v}_e = T_e(L^h \circ L^g)\bar{v}_e = T_e L^{gh} \bar{v}_e = T_e L^{gh} v = \bar{v}_{gh}$. Para ver que $\mathbb{V}$ é suave, usaremos uma caracterização equivalente para a suavidade de um campo que é a de operar em funções suaves gerando funções suaves. Fixe uma $f \in C^\infty(G)$ e note que $(\bar{v}f)(g) = \bar{v}_g f = (T_e L^g v) f = v(f \circ L^g)$. Podemos calcular o valor de $v$ em $f \circ L^g$ por meio de curvas. Tome uma curva suave $\gamma : (-\delta, +\delta) \to G$ tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = v$. Temos que $v(f \circ L^g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ L^g \circ \gamma)_{t=0}$. A derivada de $f \circ L^g \circ \gamma$ em $t = 0$ coincide com a derivada parcial desta função $\psi : (-\delta, +\delta) \times G \to \mathbb{R}(t, g), \quad (t, x) \mapsto f \circ L^x \circ \gamma(t)$ em relação $t$ em $(t, x) = (0, g)$. Como $\psi$ se escreve compondo e tomando produto de funções suaves, $\psi = f \circ \mu \circ (\gamma \times 1_G)$, sua derivada parcial $\varphi_t$ é uma função suave e, portanto, $\varphi_t|_{t=0} = \bar{v} f$ também é. Concluimos então que $\mathrm{T}_e G$ é isomorfo a $\mathfrak{g}$.

Aplicando a ideia de fluxos aos campos invariantes à esquerda, podemos de maneira natural definir uma aplicação de $\mathfrak{g}$ em $G$. Simbolizando por $\mathbf{X}$ o fluxo maximal de um campo $X$, podemos definir o ***mapa exponencial de*** $G$ como $\exp : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}, \quad X \mapsto \mathbf{X}(1, e)$. Ao denotarmos $\exp(X)$ como $e^X$ e vale a propriedade agradavelmente familiar: $e^{(s+t)X} = e^{sX} e^{tX}$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Temos também que $g e^{tX} = \mathfrak{X}(t, g)$ e, o que solidifica a naturalidade de exp, que, dado um morfismo de grupos de Lie $f : G \to \tilde{G}$, vale o diagrama comutativo ao lado.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{T}_e f"'] & \mathrm{T}_{\tilde{e}} \tilde{G} \arrow[r, "\sim"] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[d, "\tilde{\exp}"'] \\
G \arrow[rrr, "f"] & & & \tilde{G}
\end{tikzcd}$$

## 5.2 Representações

Dado um grupo $G$ e um espaço vetorial $\mathbb{V}$ chamamos a um morfismo de grupos $G \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ de uma ***representação de grupo*** de $G$ em $\mathbb{V}$. Acontece que o grupo de automorfismos de um espaço vetorial pode ser encarado como um grupo de Lie e aí, se $G$ é um grupo de Lie, podemos considerar ***representações de grupos de Lie***, morfismos $G \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ de grupos de Lie.

Para reparar que $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ é uma variedade, podemos injetar $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ em $\mathbb{R}^{n^2}$ como uma subvariedade aberta. Com uma escolha de base para $\mathbb{V}$ e pondo $n := \dim \mathbb{V}$, se identificam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{R}^n$ e constrói-se um isomorfismo desde $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ às matrizes invertíveis $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Tendo em vista que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é um aberto do espaço $\mathbb{M}(n)$ de matrizes quadradas de ordem $n$ – por ser a pré-imagem do aberto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelo mapa do determinante –, e que $\mathbb{M}(n)$ é um grupo de Lie por sua identificação canônica com $\mathbb{R}^{n^2}$, podemos conceder a $\mathrm{GL}(V)$ a estrutura suave que faz da injeção $\mathrm{GL}(\mathbb{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{M}(n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n^2}$ um mergulho.

Ante que todo grupo de Lie $G$ tem um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ que lhe é especial, é natural tentar construir uma representação Ad do grupo $G$ em sua própria álgebra de Lie, a qual chamamos ***representação adjunta*** de $G$. Mediante a identificação canônica $\mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ pelo mapa de avaliação $\varepsilon : \mathfrak{g} \to G$, podemos identificar cada transformação $L$ que está em $\mathrm{GL}(\mathrm{T}_e G)$ com uma transformação $\varepsilon^{-1} \circ L \circ \varepsilon$.

Além disso, dado um $g$ em $G$, o mapa tangente $\mathrm{T}_e C^g$ é um isomorfismo, visto que as conjugações são difeomorfismos. Define-se então Ad da seguinte maneira: $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \varepsilon^{-1} \circ (\mathrm{T}_e C^g) \circ \varepsilon$ e se pode mostrar que Ad é efetivamente um morfimos de grupos. Denotaremos $\mathrm{Ad}(g) =: \mathrm{Ad}^g$.

### 5.3 Ação de grupos de Lie

Um outro aspecto que é importante entendermos para seguirmos rumo aos fibrados principais, é o de como podem os grupos agir sobre conjuntos. Uma ***ação à direita*** de um grupo $G$ em um conjunto $X$ é um mapa $\triangleleft : X \times G \to X, (x, g) \mapsto x \triangleleft g$ tal que $x \triangleleft e = x$ e $(x \triangleleft g) \triangleleft h = x \triangleleft (gh)$. Se $G$ for um grupo Lie e $X$ for uma variedade, com a condição a mais de que $\triangleleft$ seja suave, dizemos que essa é uma ***ação suave à direita***. Com frequência suprimiremos os símbolo que denota a ação.

Instituída uma ação de $G$ em $X$, podemos falar em alguns subconjuntos de $G$ e de $X$ especiais para cada ponto $x$ em $X$. O ***subgrupo de estabilizadores*** ou o ***estabilizador*** de $x$ é o conjunto $\mathrm{Stab}(x) := G^x := \{g \in G \,|\, xg = x\}$. Já a ***órbita*** de $x$ é o conjunto $\mathrm{Orb}(x) := xG := \{y \in X \,|\, \exists g \in G(xg = y)\}$. Há um resultado simples que expõe a relação entre a órbita e o subgrupo de estabilizadores de um ponto, o teorema órbita-estabilizador. Fixe um ponto $x$ e defina a função $\chi : G \to X, \quad g \mapsto xg$, cuja imagem é a órbita $xG$ de $x$. Note a seguinte sucessão de condições equivalentes: $\chi(g) = \chi(h) \Leftrightarrow xg = xh \Leftrightarrow x = x(hg^{-1}) \Leftrightarrow hg^{-1} \in G^x \Leftrightarrow h \in G^x g$, de que concluimos que as classes laterais do estabilizador $G^x$ são precisamente as fibras de $\chi$. Concluimos assim, que $\chi$, ou ainda, o próprio ponto $x$, define uma bijeção natural $G/G^x \xrightarrow{\sim} xG, \quad [g] \mapsto xg$.

Dizemos de uma ação que ela é ***livre*** se, sempre que $xg = xh$, valer que $g = h$. Equivalentemente, nunca ocorrre $xg = x$, a não ser que $g = e$. Já o termo ***transitiva*** empregamos para dizer que para todo par de pontos $x$ e $y$ se encontra um elemento $g$ do grupo que leva um ao outro: $xg = y$.

Se $G$ age em um conjunto $X$ e em um conjunto $Y$, dizemos que uma funão $f : X \to Y$ é $G$-***equivariante*** se para todos $g$ e $h$ em $G$ e todo $x$ em $X$ valer que $f(x \triangleleft g) \triangleleft h = f\big(x \triangleleft (gh)\big)$.

Uma importante ação suave que nasce do que já fizemos é a ação de um grupo de Lie $G$ em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por meio da representação adjunta, que se define como $\mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g}, \; (X, g) \mapsto \mathrm{Ad}^g X$.

## 6 Fibrados principais

### 6.1 Definições básicas

Seja $G$ um grupo de Lie. Podemos falar em fibrados suaves cuja fibra modelo seja $G$ enquanto conjunto; suponha, assim, que $\rho : P \to M$ seja um $G$-fibrado suave. Dizemos que esse fibrado é um ***fibrado principal*** desde que satisfaça estas duas condições:

(i) está definida uma ação de $G$ em $P$ que é suave e é livre; e

(ii) as trivializações locais $\psi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de $P$ são $G$-equivariantes, entendendo-se em $U \times G$ a ação que fixa a primeira componente e multiplica a segunda, $(x, g) \triangleleft h = (x, gh)$.

Dessa definição, se extrai logo uma outra propriedade importante: $G$ age transitivamente nas fibras de $\rho$. Isso porque $G$ age transitivamente em $\{x\} \times G$ e uma trivialização $\psi$ restrita à fibra de $x$ é um mapa $P_x \to \{x\} \times G$ equivariante.

Cabe ainda destacar mais um traço do comportamento de $G$ em relação ao espaço total $P$, a ação de $G$ em $P$ induz uma ação de $G$ no fibrado tangente. Sempre que se estabelece uma ação suave numa variedade, isso se dá por consequência. Definindo $r_g$ como o mapa que representa a ação de um elemento $g$, isto é, $r_g : P \to P, \quad p \mapsto p \triangleleft g$, podemos considerar que $G$ age em $\mathrm{T}P$ mandando $(g, Y_p)$ para $(\mathrm{T}_p r_g)Y_p$. Será conveniente a sucinta notação $g_* Y_p := (\mathrm{T}_p r_g)Y_p$.

Sejam $\rho : P \to M$ e $\eta : Q \to N$ $G$-fibrados principais suaves. Um mapa suave $F : P \to Q$ é um ***morfismo de fibrados principais*** se $F$ é $G$-equivariante e existe $f : M \to N$ suave tal que $f \circ \rho = \eta \circ F$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho"] & Q \arrow[d, "\eta"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

## 6.2 Fibrado de referenciais

Um dos principais exemplos de fibrados principais é o fibrado de referenciais de um fibrado vetorial. Fixemos um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ de fibra modelo $\mathbb{V}$ de dimensão $n$ e construamos o seu fibrado de referenciais $\rho : \mathrm{Fr}\, E \to M$, que é um fibrado $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$-principal.

Dada uma lista $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ de $n$ vetores de $\mathbb{V}$, se o conjunto de suas entradas constituir uma base para $\mathbb{V}$, dizemos que essa lista, essa base ordenada, é um ***referencial*** para $\mathbb{V}$. Denotamos o esbaço de todos os referenciais de $\mathbb{V}$ por $\mathrm{Fr}\mathbb{V}$. Há uma ação natural de $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ em $\mathrm{Fr}(\mathbb{V})$ que é livre e transitiva dada por $L\mathbf{b} = (Lb_1, ..., Lb_n)$ para $L \in \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ e $\mathbf{b} \in \mathrm{Fr}(\mathbb{V})$. Fixe uma base $\mathbf{e}$ de $\mathbb{V}$. Por a ação ser livre, $\mathrm{GL}(\mathbb{V})/\mathrm{Stab}(\mathbf{e}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbb{V})$; por ser transitiva, $\mathrm{Orb}(\mathbf{e}) = \mathrm{Fr}(\mathbb{V})$. Isso nos dá então uma bijeção $\chi : \mathrm{GL}(\mathbb{V}) \to \mathrm{Fr}(\mathbb{V}), \quad L \mapsto L\mathbf{e}$ e com ela podemos atribuir uma estrutura suave a $\mathrm{Fr}\,\mathbb{V}$. Essa elaboração se aplica também a cada fibra $E_x$ do fibrado vetorial de modo que podemos definir o espaço total $\mathrm{Fr}\, E$ como a união disjunta $\bigsqcup_{x \in M} \mathrm{Fr}\, E_x$ e $\rho$ como a projeção natural sobre $M$. As cartas $(U, \psi)$ de $E$ induzem as cartas $(U, \tilde{\psi})$ de $\mathrm{Fr}E$. Definimos $\tilde{\psi}$ mapeando cada $\mathbf{b}_x \in E_x$ para $\big(x, (\psi(b_1), \dots, \psi(b_n))\big)$. A ação de $G$ em $\mathrm{Fr}E$ é definida como $\mathbf{b} \triangleleft L = \tilde{\psi}^{-1}\big(x, L(\psi(b_1), \dots, \psi(b_n))\big)$ e se verifica que é independente de cartas.

## 6.3 Campos vetoriais fundamentais, o fibrado vertical e distribuições horizontais

A cada campo vetorial invariante à esquerda, podemos associar um campo vetorial no espaço total do fibrado principal. Faz-se isso assim: para cada $X$ em $\mathfrak{g}$, defina o campo $\underline{X} : P \to \mathrm{T}P$ pondo $\underline{X}_p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p \triangleleft e^{tX}\big)_{t=0}$. O lado direito dessa igualdade é de fato um vetor, repare que $p \triangleleft e^{tX}$ é uma curva suave e $\underline{X}_p$ é o vetor tangente dela em $t = 0$. O campo que resulta dessa construção é, de fato, suave e são justamente as curvas $p \triangleleft e^{tX}$ as suas curvas integrais com início em cada $p$. Isso se codifica num mapa natural $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P), \quad X \mapsto \underline{X}$. Veremos adiante que o subespaço de $\mathfrak{X}(P)$ imagem desse mapa linear já é especial meramente em relação à estrutura de fibrado suave de $P$.

Pela conversa do fibrado principal $\rho : P \to M$ com fibrado tangente de $M$, podemos destacar uma porção do fibrado tangente do fibrado principal. Fixe um ponto $p$ em $P$ e considere o mapa tangente $\mathrm{T}_p\rho : \mathrm{T}_p P \to \mathrm{T}_{\rho(p)}M$ da projeção $\rho$ do fibrado principal no ponto $p$. Definindo $\mathrm{V}_p P$ como o núcleo de $\mathrm{T}_p\rho$, ganhamos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathrm{V}_p P \hookrightarrow \mathrm{T}_p P \xrightarrow{\mathrm{T}_p\rho} \mathrm{T}_{\rho(p)}M \to 0$$

e somos impelidos a definir o subfibrado $\mathrm{V}P := \bigsqcup_{p\in P} \mathrm{V}_p P$, que é um fibrado trivial sobre $P$. Esse fibrado chamamos de o ***fibrado vertical*** de $P$. Observe que não fizemos nenhum uso da estrutura de fibrado principal de $P$, essa construção se aplica a qualquer fibrado suave.

Veremos agora que os campos fundamentais são verticais em todo lugar. Um campo fundamental $\underline{X}$ ser vertical é ele estar no núcleo de $\mathrm{T}_p$. Para podermos verificar isso, fixemos um $p \in P$, denotemos por $j_p$ a função $G \to P,\ \ g \mapsto p \triangleleft g$ e reparemos no seguinte. É possível calcular $\underline{X}$ de uma forma alternativa a que usamos para definir o campo vetorial fundamental associado a um campo invariante à esquerda $X$. Aplicando o mapa tangente de $j_p$ na identidade a $X_e$ temos que $\mathrm{T}_e j_p X_e = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(j_p(e^{tX})\right)_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p \triangleleft e^{tX}\right)_{t=0} = \underline{X}_p$ e fica visível que o mapa $\sigma$ é linear de fato. Com essa maneira de calcular $\underline{X}_p$ temos que $\mathrm{T}_p\rho\underline{X}_p = (\mathrm{T}_p\rho \circ \mathrm{T}_e j_p)A = \mathrm{T}_p(\rho \circ j_p)A$. Como $G$ age fibra a fibra, o mapa $\rho \circ j_p$ tem que ser constante e, portanto, $\mathrm{T}_p(\rho \circ j_p)A = 0$ e $\underline{X}$ é vertical.

A análise da ação de $G$ em cada ponto $p$ por meio do mapa $j_p$ nos diz mais que só que os campos fundamentais são verticais, em verdade, para cada $p$ em $p$, o mapa tangente $\mathrm{T}_e j_p$ dá um isomorfismo natural entre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e o espaço tangente vertical $\mathrm{V}_p P$. A demonstração disso segue a seguinte linha. Um campo fundamental $\underline{X}$ se anula num ponto $p$ se, e só se, ele está na álgebra de Lie $\mathfrak{L}(G^p)$ do subgrupo de estabilizadores de $p$. Isso porque se $X \in \mathfrak{L}(G^p)$, o subgrupo uniparamétrico $e^{tX}$ está contido todo em $G^p$ e aí $\underline{X}_p$ é nulo, pois $p \triangleleft e^{tX}$ é constante; e se, reversamente, $\underline{X}_p$ é 0, então temos duas curvas integrais $p$ e $p \triangleleft e^{tX}$ para $\underline{X}$ com início em $p$ e daí, por unicidade, $e^t X$ tem que estabilizar $p$. Disso extraimos que o núcleo de $\mathrm{T}_e j_p$ é a álgebra de Lie do subgrupo de estabilizadores de $p$. Como a ação é livre, $G^p$ é só $\{e\}$ e o núcleo $\mathfrak{L}(G^p)$ de $\mathrm{T}_e j_p$ é trivial e $\mathrm{T}_e j_p$ é injetivo. Da sequência exata que obtivemos acima, temos que a dimensão de $\mathrm{V}_p P$ é $\dim T_p P - \dim T_{\rho(p)} M = (\dim G + \dim M) - \dim M = \dim G = \dim \mathrm{T}_e G = \dim \mathfrak{g}$ e, portanto, $\mathrm{T}_e j_p$ também é sobrejetor. Isso nos enseja enxergar o fibrado veritcal $\mathrm{V}P$ também como o fibrado vetorial trivial $\underline{\mathfrak{g}}_P$ de fibra modelo $\mathfrak{g}$. Fixemos, consistentemente, $j_* : \underline{\mathfrak{g}}_P \to \mathrm{V}P$ como o isomorfismo entre esses dois fibrados.

Uma ***distribuição*** numa variedade é um subfibrado do fibrado tangente. À luz da existência natural do fibrado vertical de $P$, podemos definir as ***distribuições horizontais*** em $P$ como aquelas distribuições $H$ que, em soma direta com o fibrado vertical, compõem $\mathrm{T}P$, isto é , $\mathrm{T}P = \mathcal{V}_p \oplus H$. Fixada uma distribuição horizontal $H$, podemos falar em componentes verticais e componentes horizontais de um vetor por meio das projeções naturais $v : \mathrm{T}P \twoheadrightarrow \mathrm{V}P$ e $h : \mathrm{T}P \twoheadrightarrow H$ da soma direta. Note que, à despeito de que os vetores verticais se destaquem independentmente de uma distribuição horizontal, falar em componente vertical depende de saber a componente horizontal. A distribuição horizontal estabelece uma "direção" de projeção sobre o fibrado vertical. Veremos que o tipo mais desejável de distribuição horizontal num fibrado principal são as ***distribuições horizontais invariantes*** que se caracterizam por serem estáveis sob a ação de $G$ em $\mathrm{T}P$.

Considere um vetor vertical em $T_p P$ sugestivamente denotado por $\underline{A}_p$. Podemos estendê-lo a um campo fundamental $\underline{A}$, pois $\mathrm{T}_e j_p$ enquanto mapa $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{T}_e G \to \mathrm{V}_p P$ é bijetivo e então o campo fundamental que tem valor $\underline{A}_p$ em $p$ é uma extensão vertical natural para esse vetor. Fixada uma distribuição horizontal $H$, podemos fazer algo semelhante para um vetor horizontal em $p$.

### 6.4 Conexões e distribuições horizontais invariantes

Vamos formalizar a ideia de conexão no contexto de fibrados principais e observar que há uma relação entre implementar uma conexão e estipular uma distribuição horizontal complementar ao fibrado vertical. Uma conexão em $P$ será uma uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ com certas propriedades e, faremos emergirem essas propriedades construindo uma $\mathfrak{g}$-1-forma a partir de uma distribuição horizontal invariante.

Considere no fibrado $\rho : P \to M$ uma distribuição horizontal $H$ tal que, para todo $B_p$ em $H$, o vetor $g_* B_p$ ainda esteja em $H$, ou seja, uma distribuição horizontal invariante sob a ação de $G$ em $\mathrm{T}P$. Recordando que dispomos do mapa $j : \underline{\mathfrak{g}}_P \to \mathrm{V}P$ e, fixada $H$, do mapa $v : \mathrm{T}P \twoheadrightarrow \mathrm{V}P$, podemos construir em $P$ a $g$-1-forma $\omega$ como sendo $j^{-1} \circ v$ ao enxergar $\omega$ como um mapa $\mathrm{T}P \to \mathfrak{g}$, isto é, ela é a forma que delega a cada vetor o elemento da álgebra de Lie relativo à sua componente vertical segundo a distribuição horizontal $H$. Verifica-se que essa forma $\omega$ possui estas duas propriedades:

(i) $\omega(\underline{A}_p) = A$ para todo $A \in \mathfrak{g}$ e todo $p \in P$; e

(ii) $\omega \circ g_* = \mathrm{Ad}^{-g} \circ \omega$ para todo $g$ em $G$.

Definiremos uma conexão simplesmente como uma forma com tais propriedades. Diz-se que uma forma $\omega \in \Gamma\big(\mathrm{T}^*P \otimes \underline{\mathfrak{g}}_P\big)$ é uma ***conexão principal*** em $P$ se (i) ela remete os campos fundamentais aos campos invariantes à esquerda ($\omega\underline{A} = A$); e (ii) ela é $G$-equivariante enquanto mapa $\mathrm{T}P \to \mathfrak{g}$. A primeira propriedade definidora de uma conexão $\omega$ já ilumina como $\omega$ dá origem a uma distribuição. Se tivéssemos um mapa $v : \mathrm{T}P \twoheadrightarrow M$, essa propriedade poderia refraseada dizendo que $\omega$ coincide com $v \circ j_*^{-1}$ enquanto mapa $\mathrm{T}P \to \mathfrak{g}$, tendo em vista que $v$ mandaria um campo fundamental $\underline{A}$ (que é vertical) nele mesmo e $j_*^{-1}$ identificá-lo-ia, em cada $p$, com o elemento $A$ de $\mathfrak{g} \simeq \underline{\mathfrak{g}}_p$ de quem é o campo fundamental.

Visto que $v$ se anularia nos campos horizontais conforme sua respectiva distribuição horizontal, inclinamo-nos a definir $H := \ker \omega = \bigsqcup_{p \in P} \ker \omega_p$ como a distribuição associada a $\omega$ com a esperança de que ela seja horizontal e invariante e que, realmente, $\omega$ seja a forma construída com o mapa $j$ e o mapa $v$, providenciado por $H$, como fizemos anteriormente. Essa esperança se concretiza e ficamos com uma bonita correspondência. Dada uma distribuição horizontal invariante $H$, constrói-se uma conexão principal $\omega$ pondo $\omega = j_*^{-1} \circ v$ da qual $H$ é o núcleo. Dada uma conexão principal $\omega$, o seu núcleo $H$ é uma distribuição horizontal invariante tal que $\omega = j_*^{-1} \circ v$.

### 6.5 Curvatura e fibrados associados

A definição de curvatura num fibrado principal se faz a partir de uma conexão principal. Dada uma conexão principal $\omega$ em $\rho : P \to M$, a ***forma de curvatura*** $\Omega$ associada a $\omega$ é uma $\mathfrak{g}$-2-forma $\Omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \underline{\mathfrak{g}})$ dada por $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$. Mostra-se que a forma de curvatura possui as seguintes três propriedades

- $\Omega$ é horizontal, no seguinte sentido: em cada $\mathrm{T}_pP$, para quaisquer $X_p$ e $Y_p$ em $\mathrm{T}_pP$, vale que $\Omega(X_p, Y_p) = \mathrm{d}\omega(hX_p, hY_p)$, o que implica que $\Omega$ se anula em campos verticais.

- $\Omega$ é $G$-equivariante, no seguinte sentido: para qualquer $g$ em $G$, $g^*\Omega = \mathrm{Ad}^{g^{-1}}\Omega$, em que se deve entender $g^*\Omega$ como $\Omega \circ (g_* \times g_*)$.
- $\Omega$ satisfaz a segunda identidade de Bianchi, $\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]$.

Podemos também compreender $\Omega$ com uma seção de um outro fibrado, um *associado* a $P$ que iremos construir.

Suponha que $\kappa : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ seja uma representação de $G$ num espaço vetorial $\mathbb{V}$ e, por brevidade, denotemos $\kappa(g)v$ por $gv$. Definimos o fibrado $E$ sobre $M$ como o produto fibrado $P \times_\kappa \mathbb{V}$, explicitamente, o quociente de $P \times V$ pela relação de equivalência $(p, v) \sim (q, w) \Leftrightarrow \exists g \in G\big((p, v) = (pg, g^{-1}v)\big)$. Como a ação de $G$ em $P$ se dá fibra a fibra, temos o mapa de projeção $\tau : P \times_\kappa \mathbb{V} \to M$ que manda uma classe $[p, v]$ em $p$. Chamamos $\tau : P \times_\kappa \mathbb{V} \to M$ de o ***fibrado associado de** $P$ **relativo à representação*** $\kappa$. Ele é de fato um fibrado e, mais que isso, um fibrado vetorial. Podemos definir cada trivialização $\tilde{\psi}$ para $E$ a partir de cada carta $(U, \psi)$ de $P$. O mapa $\tilde{\psi}$ manda pontos $p$ em $P$ para pares $(u, g)$ em $U \times G$. É possível definir um difeomorfismo canônico $f : (U \times G) \times_\kappa \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ enviando a classe $[(x, g), v]$ em $(x, gv)$. A definição não depende de representantes, pois $f([(x, g)h, h^{-1}v]) = (x, ghh^{-1}v) = (x, gv) = f([(x, g), v])$. A inversa de $f$ é aquela que manda $(x, v)$ na classe $[(x, e), v]$. A função $\tilde{\psi} : \tau^{-1}(U) = \rho^{-1}(U) \times_\kappa \mathbb{V} \to U \times \mathbb{V}$ se define por $\tilde{\psi}([p, v]) := f([\psi(p), v])$. Além disso, em cada fibra $E_x$, as operações de espaço vetorial são induzidas de $\mathbb{V}$, isto é, aplica-se $\psi$, opera-se em $\{x\} \times \mathbb{V}$ e aí retorna-se aplicando $\psi^{-1}$. Com essas definições, o fibrado associado $E = P \times_\kappa \mathbb{V}$ se configura como um fibrado vetorial sobre $M$. Chamamos de ***fibrado adjunto de P*** o fibrado associado a $P$ relativo à representação adjunta Ad e o representamos por $\mathrm{Ad}(P)$.

Dizemos que uma $\mathbb{V}$-$k$-forma $\eta$ em $P$ é ***de tipo*** $\kappa$ se $g^*\eta = \kappa(g^{-1})\eta$, nessa expressão devemos entender $g^*\eta = \eta \circ \prod_{k=1}^{k} g^k$, isto é, $g^*\eta$ opera em campos $X_1, ..., X_k$ dando $\eta(g_*X_1, ..., g_*X_k)$. Dizemos que uma $k$-forma a valores vetoriais ou escalares $\eta$ em $P$ é ***horizontal*** se $\eta(X_1, ..., X_k) = 0$ sempre que um dos argumentos é vertical. Veremos que há uma correspondência entre as $\mathbb{V}$-$k$-formas horizontais de tipo $\kappa$ em $P$ e as $k$-formas em $M$ a valores no fibrado associado $E$ relativo a $\kappa$. A forma de curvatura $\Omega$ associada à conexão $\nabla$ em $P$ é horizontal de tipo Ad e corresponderá então a uma $E$-$k$-forma. Denotemos por $\Omega^k_\kappa(P, \mathbb{V})$ o conjunto das $\mathbb{V}$-$k$-formas horizontais de tipo $\kappa$.

Com uma escolha de ponto $p$ em $P_x$, a fibra $E_x$ do fibrado associado pode ser identificada com $\mathbb{V}$ por meio do mapa $p_* : \mathbb{V} \to E_x,\ \ v \mapsto [p, v]$. Dada uma forma $\eta$ em $\Omega^k_\kappa(P, \mathbb{V})$ podemos construir uma $E$-$k$-forma $\eta^\flat$ em $M$ assim. Dados $m \in M$ e $v_1, ..., v_k \in \mathrm{T}_m M$, tome um ponto $p$ em $P_x$ e tome vetores $u_1, ..., u_k$ em $\mathrm{T}_p P$ tais que $T_p\rho(u_i) = v_i$; definimos $\eta^\flat(v_1, ..., v_n) := p_* \circ \eta(u_1, ..., u_k)$. Mostra-se que essa definição não depende nem da escolha de $p$ e nem das escolhas de levantamento $u_i$ para $v_i$. Na outra direção, se $\lambda$ pertence a $\Omega^k(M, E)$, dados $p \in P$ e $u_1, ..., u_n \in \mathrm{T}_p P$, define-se a forma $\lambda^\sharp \in \Omega^k_\kappa(P, \mathbb{V})$ pondo $\lambda^\sharp(u_1, ..., u_k) = p_*^{-1}(\lambda(\mathrm{T}_p\rho\, u_1, ..., \mathrm{T}_p\rho\, u_1))$. Da definição, é imediato que $\lambda^\sharp$ é horizontal e se verifica que é de tipo $\kappa$. Feito isso, sabe-se que os mapas $\flat : \Omega^k_\kappa(P, \mathbb{V}) \to \Omega^k(M, E)$ e $\sharp : \Omega^k(M, E) \to \Omega^k_\kappa(P, \mathbb{V})$ estão bem definidos e verifica-se que são inversos, isto é, que há de fato uma correspondência.

Por haver essa correspondência, quando $k = 2$ e $\kappa$ é a representação adjunta de $G$, temos em particular o que anunciáramos: que a curvatura $\Omega$, que é uma 2-forma em $P$ a valores em $\mathfrak{g}$, pode ser vista como uma 2-forma em $M$ a valores no fibrado adjunto $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$.

## 7 Considerações finais

Apresentamos, de forma abreviada, a teoria genérica de variedades suaves, abordando funções suaves, fibrado tangente, campos vetoriais e fluxos. Depois disso, exploramos a teoria básica dos fibrados vetoriais suaves, expondo as ideias a respeito de fibrados derivados obtidos por meio de funtores suaves, tratando os conceitos de seções, formas diferenciais, conexões e curvatura e estabelecendo a correspondência entre operadores $C^\infty(M)$-lineares e morfismos de fibrados. Passamos então a uma exposição sobre grupos de Lie, ações de grupo e representações de grupo. Vimos então o que são os fibrados principais e que neles há naturalmente a ideia de vetores verticais, a qual leva a uma noção de conexão no fibrado principal. Há uma correspondência entre a escolha de uma conexão e a de uma distribuição invariante complementar ao fibrado vertical. Fixar uma forma de conexão enseja definir as componentes vertical e horizontal de cada vetor tangente ao fibrado principal e uma noção de curvatura relativa a essa conexão. Vimos, por fim, que dada uma representação do grupo modelo do fibrado principal em um espaço vetorial, emerge o conceito de fibrado associado, com o qual podemos enxergar a forma de curvatura como uma forma na variedade base a valores no fibrado associado. Isso porque, nestas circunstâncias, há uma correspondência entre as formas no fibrado principal a valores nesse espaço vetorial e as formas na variedade base a valores no fibrado associado relativo a essa representação.

Os passos seguintes no percurso rumo ao Teorema de Atiyah-Singer, que devem ser dados numa próxima etapa desse estudo, são explorar a teoria dos operadores $C^\infty(M)$-lineares – apreendendo os conceitos de operadores diferenciais elípticos e símbolos desses operadores –, e explorar a teoria de classes características no nível de fibrados vetoriais e de fibrados principais com vistas a, com um entendimento sólido do enunciado do teorema, aprender uma de suas demonstrações.

## Referências


[1] Liviu I. Nicolaescu. *Notes on the Atiyah-Singer Index Theorem.* 2013.

[2] Loring W. Tu. *Differential Geometry: connections, curvature and characteristic classes.* Springer Nature, 2017.

[3] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer Nature, 2e, 2013.

[4] Ivan Kolář; Peter W. Michor; Jan Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry.* 2000.